



北京理工大学珠海学院

BEIJING INSTITUTE OF  
TECHNOLOGY, ZHUHAI

# 2016 年大学生数学竞赛试卷

专业\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	总分
满分	20	20	30	30	
得分					

试卷说明：①闭卷；②时间：120 分钟。

得分\_\_\_\_\_ 一、解答下列各题（本题满分 20 分，每题 10 分）

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{k}{x}} = \int_{-\infty}^k te^t dt$ ，求常数  $k$ 。

2. 设  $x > 0$  时， $\int x^2 f(x) dx = \arcsin x + C$ ， $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数，且  $F(1) = 0$ ，求  $F(x)$ 。

此处不能书写

此处不能书写

装

此处不能书写

订

此处不能书写

线

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

得分

二、解答下列各题（本题满分 20 分，每题 10 分）

3. 已知数列  $\{x_n\}$  满足：  $x_1 > 0$  ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})(n=1,2,\cdots)$  , 证明数列  $\{x_n\}$  的极限存在，并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  .

$$4. \int_0^1 \arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(2+x)^2} dx$$

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

得分	
----	--

三、解答下列各题（本题满分 30 分，每题 15 分）

5. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $x^2 - \int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = 0$  所确定，求  $y''(0)$ .

6. 过  $(1,0)$  作曲线  $y = \sqrt{x-2}$  的切线，求该切线与曲线及  $x$  轴围成的平面图形分别绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转所得的旋转体体积  $V_x$  和  $V_y$ .

此处不能书写

此处不能书写

装

此处不能书写

订

此处不能书写

此处不能书写

线

此处不能书写

此处不能书写

得分

四、解答下列各题: (本题满分 30 分, 每题 15 分)

7.(1) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0,1]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 记  $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$ ,

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ ,  $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx$ , 比较  $I_1, I_2, I_3$  的大小.

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}})$

8. 设  $n$  为自然数,  $g(x) = \int_0^x (t - t^2) \sin^{2n} t dt$ , 证明:

(1)  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上取最大值, 并求出最大值点.

(2)  $\max_{[0, +\infty)} g(x) \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$