

此
处
不
能
书
写



北京理工大学珠海学院

BEIJING INSTITUTE OF
TECHNOLOGY, ZHUHAI

此
处
不
能
书
写

此
处
不
能
书
写

装

此
处
不
能
书
写

订

此
处
不
能
书
写

线

此
处
不
能
书
写

此
处
不
能
书
写

第八届大学生数学竞赛试卷

____专业____班级 学号____ 姓名____

题号	一	二	三	四	总分
满分	20	20	30	30	
得分					

试卷说明：①闭卷；②时间：120 分钟。

得分

 一、解答下列各题（本题满分 20 分，每题 10 分）

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\arctan \frac{k}{x} - \arctan \frac{k}{x+1} \right)$ （其中 k 为常数）

2. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{1 + e^{n(x-1)}}$ 处处可导，试确定 a, b 的值.

得分	
----	--

二、解答下列各题（本题满分 20 分，每题 10 分）

3. 设 $x_1 \in (0,2)$, $x_{n+1} = 2x_n - x_n^2$ ($n=1,2,\dots$) , 试证数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]dx$,

并用此结论计算 $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

得分	
----	--

三、解答下列各题（本题满分 30 分，每题 15 分）

5. 设函数 $f(x)$ 在包含原点在内的某区间 (a, b) 内有二阶导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，
 $f''(x) > 0 (a < x < b)$ ，证明： $f(x) \geq x \quad (a < x < b)$ 。

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，试证明： $2 \int_a^b f(x) \left(\int_x^b f(t) dt \right) dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

此处不能书写

装

订

线

得分

四、解答下列各题：(本题满分 30 分，每题 15 分)

7. 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调上升， $t \in [0,1]$ ， $y = f(x)$ 与直线 $y = f(1)$ 及 $x = t$ 围成图形的面积为 $S_1(t)$ ， $y = f(x)$ 与直线 $y = f(0)$ 及 $x = t$ 围成图形的面积为 $S_2(t)$. (1) 证明：存在唯一的 $t \in (0,1)$ ，使得 $S_1(t) = S_2(t)$.
(2) t 取何值时两部分面积之和取最小值？

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在连续导数，在 (a,b) 内存在二阶导数， $f(a) = f(b) = 0$ ， $\int_a^b f(x)dx = 0$ ，求证：(1) 至少存在互异的两点 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ ，使得 $f'(\xi_1) = f(\xi_1)$ ；
(2) 至少存在一点 $\eta \in (a,b)$ ， $\eta \neq \xi_1, \xi_2$ ，使得 $f''(\eta) = f(\eta)$.