

此
处
不
能
书
写



北京理工大学珠海学院
BEIJING INSTITUTE OF
TECHNOLOGY, ZHUHAI

此
处
不
能
书
写

此
处
不
能
书
写

此
处
不
能
书
写

此
处
不
能
书
写

此
处
不
能
书
写

此
处
不
能
书
写

装

订

线

2017 年大学生数学竞赛试卷

____ 专业 ____ 班级 学号 ____ 姓名 ____

题号	一	二	三	四	总分
满分	20	20	30	30	
得分					

试卷说明：①闭卷；②时间：120 分钟。

得分

 一、解答下列各题（本题满分 20 分，每题 10 分）

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续，讨论 $\varphi(x) = f(x) \left| \arctan(x - a) \right|$ 在 $x = a$ 处的连续性与可导性.

得分	
----	--

二、解答下列各题（本题满分 20 分，每题 10 分）

3. 设 $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$, $x_0 = 0$, $x_n = f(x_{n-1})$ ($n \geq 1$), 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = A$, 求 $\int_0^1 \left[\int_x^1 f(t)dt + (1-x)f(x) \right] dx$.

得分	
----	--

三、解答下列各题（本题满分 30 分，每题 15 分）

5. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + \int_0^y e^{t^2} dt - e^x + x = 0$ 所确定, 且 $y(0) = 0$, 求 $y = y(x)$ 的最小值.

6. 已知抛物线 $y = 1 - x^2$ 与 x 轴所围的平面图形被抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 分成面积相等的三部分,

(1) 求常数 a 的值;

(2) 求此时两条抛物线所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

此处不能书写

此处不能书写

装

此处不能书写

订

此处不能书写

此处不能书写

线

此处不能书写

此处不能书写

得分

四、解答下列各题：(本题满分 30 分，每题 15 分)

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($a > 0$), $\int_a^b f(x)dx = 0$, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^\xi f(x)dx = \xi f(\xi)$.

8. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且满足 $f(x) + f(-x) = A$ (A 为常数).

(1) 试证: $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$;

(2) 计算: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.